Les déterminants

M4 – Chapitre 4

I. Définition

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} \underset{\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)}{E^n} & \to & \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_n) & \to & det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

II. Propriétés

- det est antisymétrique $\quad \det(\dots, u_i, \dots, u_j, \dots) = -\det(\dots, u_j, \dots, u_i, \dots)$
- det est linéaire en chaque variable $\quad \det(\dots, u + \alpha v, \dots) = \det(\dots, u, \dots) + \alpha\, det(\dots, v, \dots)$

- $\boxed{\det(u_1, \dots, u_n) = 0 \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n) \text{ liée}}$

III. Calcul de $\det(u_1, \dots, u_n)$

1. Dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{matrix} \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{matrix} \end{matrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''$$

3. Avec une matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & x \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

IV. Règles de calcul

1. Opérations sur les colonnes et les lignes

On ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute ou soustrait à une colonne ou une ligne donnée une combinaison linéaire des autres colonnes ou ligne.

Quand on multiplie une colonne par α, on doit diviser le déterminant par α.

2. Méthode de Cramer

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad D = \det M \qquad \text{On cherche a résoudre } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & a & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & c & \cdot \end{vmatrix}}{D} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & b \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix}}{D}$$

3. Développement de déterminant

La méthode de calcul est la suivante :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \boxed{a}\boxed{\begin{pmatrix} e & h \\ f & i \end{pmatrix}} + \boxed{d}\boxed{\begin{pmatrix} b & h \\ c & i \end{pmatrix}} + \boxed{g}\boxed{\begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix}}$$

Cette méthode ici appliquée à la 1$^{\text{ère}}$ ligne peut être appliquée à n'importe quelle ligne ou colonne.