

Les déterminants

M4 – Chapitre 4

I. Définition

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{l} E^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathcal{B}=(e_1, \dots, e_n) \\ (v_1, \dots, v_n) \rightarrow \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

II. Propriétés



- \det est antisymétrique $\det(\dots, u_i, \dots, u_j, \dots) = -\det(\dots, u_j, \dots, u_i, \dots)$
- \det est linéaire en chaque variable $\det(\dots, u + \alpha v, \dots) = \det(\dots, u, \dots) + \alpha \det(\dots, v, \dots)$
- $\det(u_1, \dots, u_n) = 0 \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n)$ liée

III. Calcul de $\det(u_1, \dots, u_n)$

1. Dans \mathbb{R}^2

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

2. Dans \mathbb{R}^3

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''$$

3. Avec une matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & x \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

IV. Règles de calcul

1. Opérations sur les colonnes et les lignes

On ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute ou soustrait à une colonne ou une ligne donnée une combinaison linéaire des autres colonnes ou ligne.

Quand on multiplie une colonne par α , on doit diviser le déterminant par α .

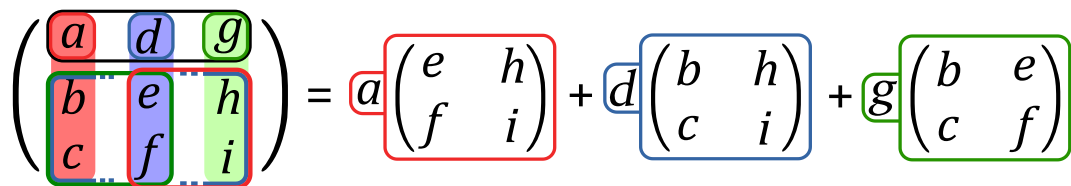
2. Méthode de Cramer

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad D = \det M \quad \text{On cherche à résoudre } \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & a & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & c & \cdot \end{vmatrix}}{D} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & \cdot & b \\ \cdot & \cdot & c \end{vmatrix}}{D}$$

3. Développement de déterminant

La méthode de calcul est la suivante :


$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = a \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

Cette méthode ici appliquée à la 1^{ère} ligne peut être appliquée à n'importe quelle ligne ou colonne.